Option M

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

DURÉE : 4 heures

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants

PREMIER PROBLÈME

Soit $\mathscr{H}$ la courbe paramétrée par :

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{A}(t) = (a \cos t,\ a \sin t,\ at), \quad a > 0$$

et $\mathrm{D}(t)$ la tangente à $\mathscr{H}$ au point $\mathrm{A}(t)$.

On appelle Σ la surface engendrée par la famille des droites $\mathrm{D}(t)$, quand t parcourt $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les droites $\mathrm{D}(t)$ font avec le plan xOy un angle constant que l'on déterminera, et qu'elles sont toutes tangentes à un cylindre de révolution dont on donnera une équation cartésienne.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique point $\mathrm{M}(\lambda, t)$ vérifiant :

$$\mathrm{M}(\lambda, t) \in \mathrm{D}(t)$$
$$\mathrm{M}(\lambda, t) \text{ appartient au plan d'équation } z = \lambda.$$

   On obtient ainsi une paramétrisation de Σ :

$$(\lambda, t) \longrightarrow \mathrm{M}(\lambda, t).$$

3. Écrire l'équation cartésienne du plan tangent à Σ en un point de Σ n'appartenant pas à $\mathscr{H}$.

   Que se passe-t-il si le point est sur $\mathscr{H}$?

4. Soit γ_0 l'intersection de Σ et du plan xOy.

   a. Tracer la portion d'arc de γ_0 correspondant aux valeurs du paramètre $t \in [-\pi, \pi]$.

   b. Soit $m(t)$ le point générique de γ_0. Montrer que la normale en $m(t)$ est tangente à un cercle fixe à déterminer.

   c. Soit γ_h l'intersection de Σ et du plan d'équation $z = h$.

   Montrer que l'on passe de γ_0 à γ_h par un vissage dont on donnera les éléments qui le caractérisent.

   On pourra commencer par poser $t = \tau + \dfrac{\lambda}{a}$.

5. Soit σ l'intersection de Σ et du plan $y = a$. Tracer la branche correspondant aux valeurs du paramètre $t \in [0, 2\pi]$.

   Comment peut-on passer au reste de la section ?

DEUXIÈME PROBLÈME

I

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de dimension finie ou non sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes et f un endomorphisme de E, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

1. Pour tout nombre λ de $\mathbb{C}$, montrer que la suite des noyaux $N_k(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda i)^k$ est croissante avec l'entier k (i désigne l'identité de E). En déduire que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Ker}(f - \lambda i)^k$ est un sous-espace vectoriel de E que l'on notera F_λ.

2. Démontrer que F_λ n'est pas réduit à $\{0\}$ si et seulement si λ est valeur propre de f et que F_λ est stable par f.

   F_λ est appelé sous-espace spectral relatif à la valeur propre λ.

3. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres distinctes de f, la somme $\sum_{i=1}^{p} F_{\lambda_i}$ est directe.

4. Soit λ une valeur propre de f, on suppose qu'il existe un plus petit entier $n(\lambda)$ strictement positif tel que :

$$N_{n(\lambda)}(\lambda) = N_{n(\lambda)+1}(\lambda),$$

   montrer qu'alors on a $F_\lambda = N_{n(\lambda)}(\lambda)$. L'entier $n(\lambda)$ s'appelle l'indice de la valeur propre λ qui est alors dite d'indice fini.

5. Montrer par un exemple simple, dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, qu'une valeur propre d'un endomorphisme n'est pas toujours d'indice fini.

6. Si l'idéal de $\mathbb{C}[X]$ formé par les polynômes P tels que $P(f) = 0$ n'est pas réduit au polynôme nul, il admet un générateur non nul Π_f appelé polynôme minimal de f.

   Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ n'admettant pas de polynôme minimal.

7. Démontrer que si f admet un polynôme minimal Π_f, on a les propriétés suivantes :

   α. L'ensemble des valeurs propres de f ou spectre de f noté $\operatorname{Sp} f$ est non vide et fini.

   β. Toutes les valeurs propres de f sont d'indice fini.

   γ. On a $\Pi_f(X) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} (X - \lambda)^{n(\lambda)}$ où $n(\lambda)$ est l'indice de la valeur propre λ.

   δ. f est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire E est somme directe des sous-espaces spectraux F_λ. $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} F_\lambda$.

II

On suppose dorénavant E de dimension finie n.

1. Démontrer que toute valeur propre λ d'un endomorphisme f de E est d'indice fini $n(\lambda)$ et que $n(\lambda)$ est inférieur ou égal à la dimension du sous-espace spectral F_λ.

2. Démontrer que si λ est une valeur propre de f d'indice $n(\lambda)$, la suite des images $\operatorname{Im}(f - \lambda i)^k$ est décroissante, c'est-à-dire que $\operatorname{Im}(f - \lambda i)^{k+1} \subset \operatorname{Im}(f - \lambda i)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

   On pose $G_\lambda = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{Im}(f - \lambda i)^k$; montrer que G_λ est un sous-espace vectoriel de E stable par f, que $G_\lambda = \operatorname{Im}(f - \lambda i)^{n(\lambda)}$ et enfin que $E = F_\lambda \oplus G_\lambda$.

3. Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$; démontrer en comparant les polynômes caractéristiques des endomorphismes induits par f sur F_λ et G_λ avec celui de f que la dimension de F_λ est égale à $m(\lambda)$.

4. En déduire que $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp} f} F_\lambda$ et donc qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit un tableau diagonal de matrices carrées M_i avec M_i d'ordre $m(\lambda_i) = \dim F_{\lambda_i}$, $1 \leqslant i \leqslant p$, et triangulaire supérieure de la forme :

$$M_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p$$

si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les p valeurs propres distinctes de f.

III

(Partie indépendante de **I** *et* **II***)*

Dans cette partie, on suppose f nilpotent de période $p \geqslant 2$, c'est-à-dire qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $f^p = 0$ avec f^{p-1} non nul.

1. Montrer que la suite des noyaux $\operatorname{Ker} f^k$ est strictement croissante avec l'entier k jusqu'à $\operatorname{Ker} f^p = E$.
   En déduire que $p \leqslant n = \dim E$.

2. Démontrer que $f(\operatorname{Ker} f^{k+1}) \subset \operatorname{Ker} f^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
   Soit F un sous-espace de E tel que $F \cap \operatorname{Ker} f^k = \{0\}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$; montrer qu'alors :
   $$f(F) \cap \operatorname{Ker} f^{k-1} = \{0\}$$
   et que la restriction de f à F est injective.

3. Démontrer qu'il existe une suite $F_1, F_2, \ldots, F_p$ de sous-espaces de E tels que $\operatorname{Ker} f^k = F_k \oplus \operatorname{Ker} f^{k-1}$ pour $1 \leqslant k \leqslant p$, f appliquant F_k injectivement dans F_{k-1} $(k \geqslant 2)$. Démontrer que $F_1 = \operatorname{Ker} f$ et que :
   $$E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i .$$

4. On pose $\dim F_k = n_k$, soit $e_{1,p}, e_{2,p}, \ldots, e_{n_p,p}$ une base de F_p, démontrer que l'on peut choisir une base de F_{p-1} de la forme $(e_{i,p-1})_{1 \leqslant i \leqslant n_{p-1}}$ telle que $e_{i,p-1} = f(e_{i,p})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n_p$. Former de même les bases de $F_{p-2}, F_{p-3}, \ldots, F_1$.

5. La réunion de ces bases des F_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ est une base B de E. On ordonne les éléments de B dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire que $e_{i,j}$ est antérieur à $e_{k,\ell}$ si et seulement si $i < k$ ou $(i = k$ et $j < \ell)$.
   Soit $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ cette base ordonnée ainsi, montrer que $f(b_i) = 0$ ou que $f(b_i) = b_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$.
   En déduire que la matrice $M = (\alpha_{ij})$ de f dans cette base a tous ses éléments nuls sauf certains éléments $\alpha_{i-1,i}$ égaux à 1.

IV

On appelle matrice de Jordan d'ordre m relative à $\lambda \in \mathbb{C}$, la matrice carrée d'ordre m notée $J_m(\lambda)$ telle que :

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & & \\ & 0 & & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{ii} = \lambda \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$\alpha_{i-i,i} = 1 \qquad 2 \leqslant i \leqslant m.$$

1. Démontrer que si f est nilpotent, il existe une base de E dans laquelle la matrice f est un tableau diagonal de matrices de Jordan relatives à $\lambda = 0$.

2. Si f n'est plus nilpotent, montrer que si λ est une valeur propre de f d'indice $n(\lambda)$ alors l'endomorphisme u de F_λ induit par f s'écrit sous la forme $u = \lambda i_{F_\lambda} + v$ où i_{F_λ} est l'identité de F_λ et v un endomorphisme de F_λ nilpotent de période $n(\lambda)$.

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est un tableau diagonal de matrices de Jordan relatives aux valeurs propres de f.

4. Trouver les réduites de Jordan semblables aux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$